Približné čísla

Aký je rozdiel medzi týmito dvoma vetami?

- „súťaže sa zúčastnilo 6500 gymnazistov z celého Slovenska“
- „súťaže sa zúčastnilo približne 6500 gymnazistov z celého Slovenska“

Prvý výrok nám hovorí, že súťaže sa zúčastnilo práve – presne – 6500 gymnazistov.

„Približne 6500“ v druhej vete môže znamenať:

- Zaokrúhlene **na desiatky**: počet gymnazistov na súťaži bol medzi 6495 a 6505
- Zaokrúhlene **na stovky**: počet gymnazistov na súťaži bol medzi 6450 a 6550

Vidíme, že medzi zaokrúhlením na desiatky a na stovky je dosť veľký priestor – pri zaokrúhlení na stovky môže byť počet účastníkov značne rozdielny – údaj nie je príliš presný. Ak by napr. kuchárky, ktoré by mali na podujatí variť dostali rozkaz – uvarte približne 6500 obedov, pričom číslo je zaokrúhlené na stovky, mohlo by sa stať, že by im približne 100 obedov chýbalo alebo, 100 porcií by vyšlo nazmar. Z tohto hľadiska vidíme, že zaokrúhlenie na desiatky poskytuje presnejší údaj.

Ako sa zapisujú zaokrúhlené čísla?

Predchádzajúci zápis a vysvetlenie nám vystačí možno v bežnom živote. No pri písaní odborných publikácií by sme si tak nevystačili. Preto sa zaviedol pojem **platné číslice a vedecký zápis čísel.**

Vezmime si napríklad astronóma, ktorý pozoruje oblohu. Objaví teleso pohybujúce sa okolo Zeme, ktorého vzdialenosť od zeme je podľa výpočtov **39 888,9 km**. Pre tlačovú agentúru toto číslo zaokrúhli na 40 000 a zapíše, že neznámy objekt sa pohybuje vo vzdialenosti **$4{,}0 \cdot 10^4$ km** od zeme. Týmto zdôraznil, že číslo **40 000 získal zaokrúhlením pôvodného čísla na tisícky**, teda, že prvú nulu za číslicou 4 v čísle 40 000 ešte „treba brať vážne“. Číslice **4** a **0** uvedené v tomto zápise voláme **platné číslice**. Môžeme teda povedať, že ak číslo 40 000 vzniklo zaokrúhlením na tisícky, má dve platné číslice.

Ak by sme číslo **40 000** dostali zaokrúhlením na **desaťtisícky**, jeho vedecký zápis by sme napísali v tvare **$4 \cdot 10^4$** (v zápise 40 000 je teda **platná** len **jedna číslica** a to číslica **4**). Ak by sme 40 000 dostali zaokrúhlením na stovky, vedecky zápis by mal tvar **$4{,}00 \cdot 10^4$** (v tomto prípade by v zápise čísla 40 000 boli **platné tri číslice** – číslica **4 a prvé dve nuly**.)

Pojem „platné číslice“ sa používa **rovnako i pri zaokrúhľovaní na desatiny, stotiny, tisíciny, desať tisíciny** atď. Ak by sme si napr. prečítali, že množstvo dusitanov vo vzorke je 0,003 20 g/l a že v uvedenom výsledku sú tri platné číslice (3, 2, 0), vedeli by sme, že výsledok bol zaokrúhlený na

stotisícíny.

Vedecky by sme zapísali: „Obsah dusitanov vo vzorke je **3,20 .10^{-3}** g/l“.

Približné čísla ale nevznikajú len zaokrúhľovaním. V matematických vzorcoch sa často používa „π“, pričom pri rátaní dosádzame jeho miesto najčastejšie číslo 3,14. Hodnota 3,14 je však len približná, rovnako približná hodnota π je 3,14159265358979323846. Podľa Archimeda je približná hodnota π 22/7; ukázal že:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

T.j. hodnota π je niekde medzi 3 celá 10/71 a 3 celá 1/7.

Ďalší spôsob ako môžu „vznikať“ približné čísla je napr. aritmetický priemer pri meraní nejakých hodnôt, napr. ak stanovujeme v analytickej chémii koncentráciu nejakej látky titrovaním, zvyčajne titrujeme minimálne 3x a výsledky výpočtov potom spriemerujeme čím dostaneme približnú koncentráciu. Čím viac meraní prevedieme, tým je hodnota presnejšia.

Absolútna chyba približného čísla je vzdialenosť medzi **približným číslom a presným číslom**. Absolútna chyba je **vždy nezáporná.**

$$\Delta = |\bar{P} - p|$$

$$kde\colon \Delta = \ absolútna\ chyba\ približného\ čísla;\ p\ =\ približné\ číslo;\ \bar{P}\ =\ presná\ hodnota.$$

Napríklad, ak výška postavy je **presne 1,84** m (t.j. presná hodnota P = 1,84) a my by sme povedali, že výška postavy je približne **1,8** m (p = 1,8) – absolútna chyba by bola 1,84 – 1,8 = **0,04** m. Ak by sme povedali, že výška postavy je približne 1,85 m, v tomto prípade by absolútna chyba bola 0,01 m.

Zápis:

$$p - 0{,}005 \ \leq \bar{P} \leq p + 0{,}005$$

resp.:

$$\bar{P} = p \mp 0{,}005$$

znamená, že presná hodnota sa od približnej odlišuje najviac o 0,005. T.j. ak by v tomto prípade približná hodnota p bola 7,12, tak presná hodnota P leží **iste** medzi číslami 7,115 a 7,125.

Operácie s približnými číslami

Ak zrátame či napr. odčítame presné hodnoty čísiel, dostaneme i presné výsledky. No ak pracujeme s približnými číslami, je zrejmé, že nemôžeme súčtom či rozdielom približných čísel získať presné hodnoty. Čím viac nepresných čísel by sme sčítali, tým nepresnejšie hodnoty môžeme získať. Preto pri operáciách s približnými číslami používame tzv. **odhad chyby súčtu a rozdielu** dvoch približných čísel a **odhad chyby súčinu presného a nepresného čísla.**

Súčet približných čísel

Môžeme vyjadriť zápisom:

$$(a \mp \Delta_a) + (b \mp \Delta_b) = (a + b) \mp (\Delta_a + \Delta_b)$$

Slovne:

Ak (číslo a sa od presnej hodnoty nelíši o viac ako Δ_a) a (číslo b sa od presnej hodnoty nelíši o viac ako Δ_b) potom (=) súčet a + b sa od presnej hodnoty nelíši o viac ako $\Delta_a + \Delta_b$.

Pomocou pojmu „absolútna chyba“ môžeme uvedenú reláciu vyjadriť takto: **Ak jeden zo sčítancov má absolútnu chybu najviac Δa a druhý najviac Δb, tak ich súčet má absolútnu chybu najviac $\Delta_a + \Delta_b$**. T.j., pri sčítaní približných čísel sa **odhady** ich **absolútnych chýb sčítajú**.

Rozdiel približných čísel

$$(a \mp \Delta_a) - (b \mp \Delta_b) = (a - b) \mp (\Delta_a + \Delta_b)$$

T.j.: ak (číslo a sa od presnej hodnoty nelíši o viac ako Δ_a) a (číslo b sa nelíši viac ako o Δ_b od jeho presnej hodnoty) potom rozdiel a – b sa od presnej hodnoty nelíši viacej ako o $\Delta_a + \Delta_b$.

Všimnime si že i pri rozdiele približných čísel sa **odhady** ich **absolútnych chýb sčítajú**.

Súčin presného a približného čísla

$$(a \mp \Delta) \cdot b = a \cdot b \mp \Delta \cdot b$$

T.j.: Ak (číslo a sa nelíši od presnej hodnoty viac ako o Δ) a b je presné číslo, potom súčin a a b sa líši od presnej hodnoty najviac o Δ.b.

Pomocou pojmu „absolútna chyba“ môžeme uvedenú reláciu vyjadriť nasledovne: **Ak v súčine a . b má činiteľ a absolútnu chybu najviac Δ a činiteľ b je presné číslo, potom absolútna chyba súčinu a . b nie je väčšia ako Δ . b.**

Súčin približného a presného čísla používame často pri výpočtoch v matematike, napr. pri výpočte obvodu kruhu, ak máme presne zadaný polomer (resp. priemer) a použijeme približnú hodnotu π = 3,14.

Zopakujte si:

1. Polomer kruhu je r = 1,7 cm. Vypočítajte jeho obvod dvoma spôsobmi: a) použijete približnú hodnotu π = 3,14 b) použijete približnú hodnotu π = 3,14159265358979323846. Porovnajte výsledky.
2. Sčítajte približné čísla a = 3,156, ak Δa = +/- 0,020 a b = 4,321, ak Δb = 0,004.
3. Približné čísla z otázky 2 odčítajte.

Použitá literatúra:

Kubáček, Z.: Matematika pred 2. ročník gymnázií, 1. časť, Orbis Pictus Istropolitana, Bratislava, 2009
http://cs.wikipedia.org/wiki/P%C3%AD_%28%C4%8D%C3%ADslo%29
vlastné poznámky